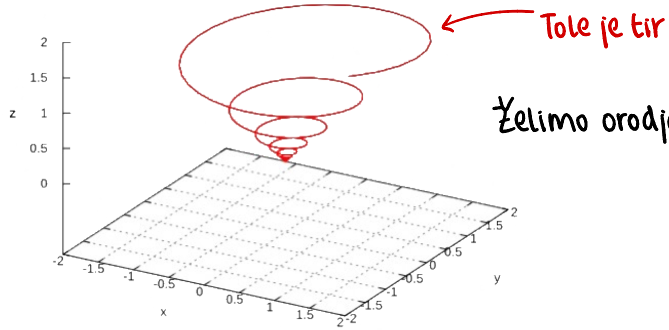
Krivulje v prostoru



Želimo orodje za opis & študij krivulj

Def: Pot v $\mathbb{R}^3$ je zvezna preslikava $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval (čas). Torej

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad ; \; t \in I$$

Sliko poti, torej $\vec{r}(I) \subset \mathbb{R}^3$ imenujemo tir.
Pot je gladka, če je $\vec{r} \in C^1(I)$. Gladka krivulja v $\mathbb{R}^3$ je gladka pot $\vec{r} = (x, y, z): I \to \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\text{odvod po } t \to \dot{\vec{r}}(t) \neq 0 \text{ za } \forall t \in I$$

→ Ne smemo se ustaviti oz. vedno moramo biti sposobni pritisniti tangento na krivuljo

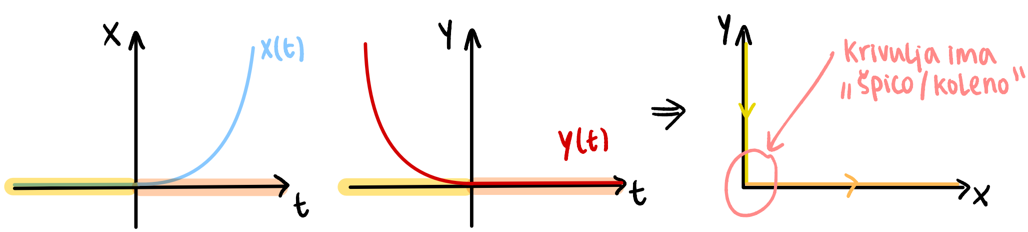
To bo naš standardni privzetek.

Primer: Def. $x, y: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s predpisoma

$$x(t) = \begin{cases} t^2 ; & t \geq 0 \\ 0 ; & t \leq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad y(t) = \begin{cases} 0 ; & t \geq 0 \\ t^2 ; & t \leq 0 \end{cases}$$

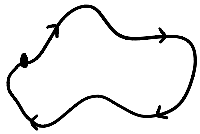
Tedaj je $\vec{r} = (x, y, 0)$ gladka pot, ki pa ni gladka krivulja, saj

$$\dot{\vec{r}}(0) = (0, 0, 0)$$

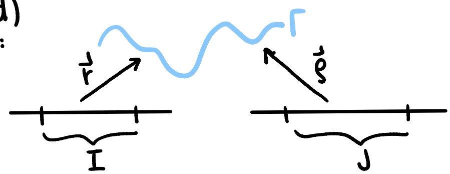


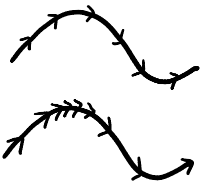
Opomba: Včasih zahtevamo, da Γ nima samopresečišč, razen morda v krajiščih. To pomeni, da je $\vec r$ ali pa vsaj $\vec r|_{int(I)}$ injektivna.
Torej takrat ne dopuščamo tega:

Eventuelno dopuščamo to:



Včasih pod „gladko krivuljo" pojmujemo $\Gamma = \vec r(I)$, medtem ko $\vec r$ rečemo regularna parametrizacija ($\vec r \in C^1(I)$ in $\dot{\vec r} \neq 0$ povsod).
Vseh regularnih parametrizacij je neskončno mnogo:



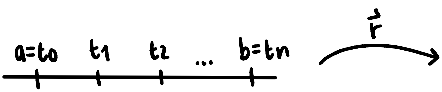


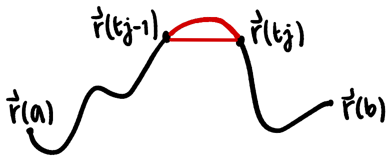
Tir je isti, eno krivuljo smo risali enakomerno hitro, drugo pa smo hitreje risali na "kuclju"

Če sta $\vec r : I \to \Gamma$ in $\vec \rho : J \to \Gamma$ bijektivni, potem $\exists \vec h = \vec \rho^{-1} \circ \vec r : I \to J$ (in je spet bijektivna), zato je $\vec r = \vec \rho \circ \vec h$.
Obrat, vsaka bijekcija $\tilde h : J \to I$ razreda C^1 z lastnostjo $\tilde h' \neq 0$ povsod, nam iz $\vec r$ porodi novo regularno parametrizacijo, namreč $\vec \rho = \vec r \circ \tilde h$.

Dolžina krivulje

← Kako naj jo sploh definiramo?





Ker sta si $\vec r(t_{j-1})$ in $\vec r(t_j)$ blizu, dolžino loka na krivulji med njima aproksimiramo z ravno daljico, katere dolžina je $|\vec r(t_j) - \vec r(t_{j-1})|$, kar je po Lagrangevem izreku prb. enako

$$|\dot{\vec r}(t_j)| \cdot (t_j - t_{j-1})$$

Zakaj? $\vec r = (x, y, z)$. Tedaj je

$$|\vec r(u) - \vec r(v)| = \sqrt{[\underbrace{x(u)-x(v)}_{\dot x(\xi_1)\cdot(u-v)}]^2 + [\underbrace{y(u)-y(v)}_{\dot y(\xi_2)(u-v)}]^2 + [\underbrace{z(u)-z(v)}_{\dot z(\xi_3)(u-v)}]^2}$$

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(v) \\ y(v) \\ z(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u)-x(v) \\ y(u)-y(v) \\ z(u)-z(v) \end{bmatrix}$$

To je po Lagrangevem izreku za neke $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (u,v)$ (ne nujno enake):

$$\sqrt{\dot{x}(\xi_1)^2 + \dot{y}(\xi_2)^2 + \dot{z}(\xi_3)^2} \cdot |u-v| \doteq \dot{\vec{r}}(u) \cdot |u-v|$$

če sta si u in v blizu

Če vse seštejemo po j dobimo

$$\sum |\dot{\vec{r}}(t_j)| \, (t_j - t_{j-1}),$$

kar je Riemannova vsota za $|\dot{\vec{r}}| : [a,b] \to [0,\infty)$, prirejena delitvi $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

Def: Če je $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ gladka krivulja, katere tir označimo z Γ, tedaj dolžino Γ definiramo kot

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| \, dt$$

Trd: Ta definicija je dobra (torej neodvisna od izbire parametrizacije).

Dokaz: Naj bo $\vec{\varsigma} : J \to \Gamma$ neka druga regularna parametrizacija za Γ. Vemo, da lahko pišemo $\vec{\varsigma} = \vec{r} \circ h$, za neko C^1 preslikavo h.

$$\int_\alpha^\beta |\dot{\vec{\varsigma}}(\gamma)| \, d\gamma = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{r}}(\underbrace{h(\gamma)}_{t})| \cdot |\dot{h}(\gamma)| \, d\gamma = \int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| \, dt \qquad \square$$

Ker je h bijektivna, krajišča slika v krajišča. Če slika v nasprotno krajišče, je h padajoča, meji se zamenjata – 2x minus da plus.

Naravni parameter

↳ pomeni "risanje krivulje s hitrostjo [konstantne] velikosti 1"

Imamo krivuljo γ, parametrizacijo z $\vec{r} = \vec{r}(t)$; $t \in [a,b]$. Hočemo novo parametrizacijo $\vec{\varsigma} = \vec{\varsigma}(s)$; $s \in [\alpha, \beta]$, pri kateri bo velikost hitrosti potovanja po γ konstantno enaka 1, torej

$$|\dot{\vec{\varsigma}}| \equiv 1$$

Privzemimo, da γ nima samopresečišč.

Def., za neko parametrizacijo $\vec{\varsigma}$,

$$S = \vec{\varsigma}^{-1} \circ \vec{r} : [a,b] \to [\alpha, \beta], \; S \text{ je injektivna.}$$

Torej je s bodisi strogo naraščajoča, bodisi strogo padajoča. Privzemimo, da je $s'>0$. Odvajamo $\vec{r}=\vec{\rho}\circ s$ in sledi

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \underbrace{|\dot{\vec{\rho}}(s(t))|}_{=1 \text{ (zahtevamo)}} \cdot |\underbrace{\dot{s}(t)}_{>0}| \quad \text{oz.} \quad \dot{s}(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

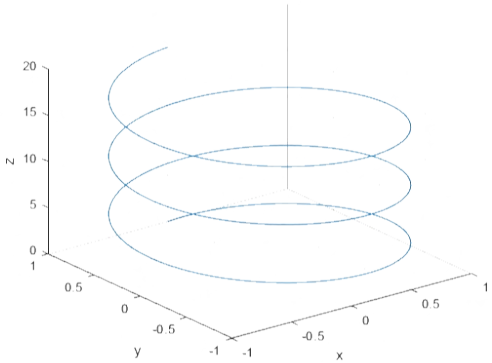
Zato def. (za polj. gladko krivuljo, z ali brez samopresečišč) naravni parameter s predpisom

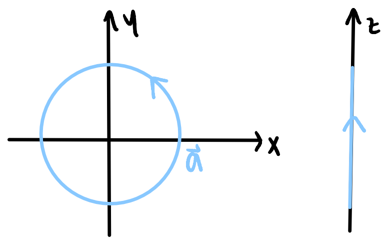
$$s(t)=\int_a^t |\dot{\vec{r}}(\tau)|\,d\tau \quad \text{za } \forall t\in[a,b],$$

hkrati pa $\sigma = s(t) \in [0, \ell(\gamma)]$. Tedaj za $\vec{\rho}(\sigma)=\vec{r}(s^{-1}(\sigma))$ velja $|\vec{\rho}\,'|=1$.

Primer: Vzemimo $a,b>0$ in def.

$$\vec{r}(t)=(a\cdot\cos t,\ a\cdot\sin t,\ bt) \quad \text{za } t\in\mathbb{R}$$





Krivulja $\Gamma=\vec{r}(\mathbb{R})$ je VIJAČNICA

Velja $\dot{\vec{r}}(t)=(-a\cdot\sin t,\ a\cdot\cos t,\ b)$, zato je

$$\sigma = s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)|\,d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\cdot t \quad \text{oz.} \quad t=\frac{\sigma}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

kjer je σ naravni parameter. Torej je naravna parametrizacija vijačnice podana z

$$\vec{\rho}(\sigma)=\left(a\cdot\cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ a\cdot\sin\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \frac{b\sigma}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Def: Vektorju

$$\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$$

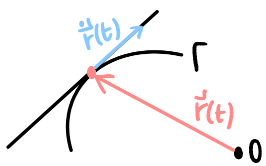
pravimo enotski tangentni vektor na Γ v točki $\vec{r}(t)$. V naravni parametrizaciji je ta vektor enak vektorju $\vec{\rho}\,'(s)$, kjer je s določen z

$$\vec{r}(t) = \vec{\rho}(s)$$

Primer: $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$
$T = \vec{r}(1) = (1,1,1)$

Tangentni vektor v točki T je $\dfrac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \dots = \dfrac{(1,2,3)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \dfrac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$

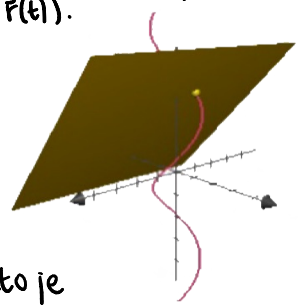
Def: Tangenta na Γ v točki $\vec{r}(t)$ je premica v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi $\vec{r}(t)$ in je vzporedna $\dot{\vec{r}}(t)$:



Enačba: $(x,y,z) = \vec{r}(t) + \lambda \cdot \dot{\vec{r}}(t)$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Def: Normalna ravnina na krivuljo Γ je ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje $\vec{r}(t)$ in je pravokotna na $\dot{\vec{r}}(t)$ (oz. na tangento na Γ v točki $\vec{r}(t)$).

Enačba: $\langle (x,y,z) - \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$.



Primer: Vijačnica $\vec{r}(t) = (a\cdot\cos t, a\cdot\sin t, bt)$
$T = \vec{r}(0) = (a,0,0)$

Velja $\dot{\vec{r}}(0) = (-a\cdot\sin t, a\cdot\cos t, b)\Big|_{t=0} = (0,a,b)$, zato je

- Tangenta v T podana z $(x,y,z) = (a,0,0) + \lambda(0,a,b) = (a, \lambda a, \lambda b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Normalna ravnina v T podana z

$$\langle (x,y,z) - (a,0,0), (0,a,b) \rangle = 0 \quad \text{oz.} \quad \langle (x-a, y, z), (0,a,b) \rangle = 0 \quad \text{oz.}$$

$$ay + bz = 0$$

Množica vseh točk $x,y,z \in \mathbb{R}^3$, ki zadoščajo pogoju pri fiksnih a in b.