Matematična fizika 1

Zapiski predavanj v študijskem letu 2020/21

Profesor Borut Kerševan

...INTERMEZZO: zveznost našega vesolja?

↳ odvod definiran kot: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ← Newton vs Leibnitz!

↳ matematično/formalno je ta limita smiselna (v $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{C}^n$...)

↳ ampak, ali je naše vesolje $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$), $n = 4$ ...? Torej ZVEZNO!
$(3+1)$

↳ Ehrenfestov razmislek o $n=3$ vesolja na spletni učilnici...

↳ PLANCKOVE ENOTE

→ sestavimo iz:

$\hbar = 1.05 \ldots \cdot 10^{-34}\,Js$

$G = 6.67 \ldots \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}$

$c_0 = 299\,792\,458\,m/s$

DIMENZIJSKA ANALIZA:

$[c_0] = L T^{-1}$

$[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$

$[\hbar] = M L^2 T^{-1}$

obrneno:

$L_p = \left(\frac{\hbar G}{c_0^3}\right)^{1/2}$

$M_p = \left(\frac{c_0 \hbar}{G}\right)^{1/2} \Rightarrow E_p = \left(\frac{c_0^5 \hbar}{G}\right)^{1/2}$

$t_p = \left(\frac{\hbar G}{c_0^5}\right)^{1/2}$

↳ vrednosti:

- planckova dolžina: $L_p = 1.6 \ldots \cdot 10^{-35}\,m$ → zelo majhen
- Planckova masa, energija, temperatura: $m_p = 2 \ldots \cdot 10^{-8}\,kg$, $E_p = 1.2 \cdot 10^{16}\,TeV$, $T_p = \frac{E_p}{k_B} = 1.4 \cdot 10^{32}\,K$ ← velikanski (LHC: 13 TeV)
- Planckova čas: $t_p = 5.4 \cdot 10^{-44}\,s$ ← zelo majhen

↳ povsem relevantne debate, ali je naše vesolje sploh zvezno za $\Delta x < L_p$ ali $\Delta t < t_p$!

↳ problem renormalizacije v kvantni teoriji polja (neskončnosti ipd...)

↳ 'natančnost' vesolja $10^{-35}\,m$ / $10^{-44}\,s$? (Odgovor tudi KM?)

UPORABA DIFERENCIALOV: kot najpreprostejši zgled...

↳ poznamo: $y=f(x)$ kot naš fizikalni zakon, f je analitična funkcija...

↳ izberemo/izmerimo $y_0=f(x_0)$

↳ koliko je $f(x_0+\Delta x)$, če je Δx majhen?

↳ GLEDE NA 'SKALO' PROBLEMA: - tipično x_0: $\frac{\Delta x}{x_0} \ll 1$

- lahko kaj drugega (fizikalno ozadje problema...)

↳ s pomočjo odvoda LINEARIZIRAMO problem:

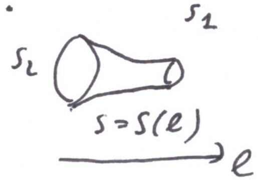
$$y_1 = y_0+\Delta y = f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x$ → tipično SMISELN korak, ČE JE TVOJ Δy MAJHEN!

↳ Linearna zveza?

↳ včasih poznamo/znamo rešiti le linearno formulo!

↳ zgled: Kakšen je upor vodnika oblike:



→ mi poznamo le linearni zakon/enačbo:

$$R=\frac{l}{S}\zeta. \quad (\sim l)!$$

↳ S, ζ = KONST!

↳ diferenciramo/lineariziramo:

dl - dovolj majhen, da je $S(l) \sim$ konst!

bistveno je vedno vprašanje fizika:

...dovolj majhen, da je...

$$dR = \frac{dl}{S(l)}\zeta \quad \text{(velja)}$$

$$R=\int dR = \int_0^l \frac{dl}{S(l)}\zeta \quad \text{(seštejemo...)}$$

→ TOTALNI DIFERENCIAL : nastopa več spremenljivk :

↳ spet aktualno pri strojnem učenju! (autodiff funkcije); zgled oz. tekst na učilnici...

$z = f(x,y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

↳ 'dual numbers' : $a + \varepsilon b$; $\left.\begin{matrix}\varepsilon^2 = 0\\ \varepsilon \neq 0\end{matrix}\right\} \begin{matrix}(a+\varepsilon b)^2 = \\ = a^2 + 2a\varepsilon b\end{matrix}$

↳ shrani kot $\{a, b\}$ ...

definiraj operacije na tem ...

→ nekaj poučnih zgledov / trikov :

→ masa barvila v tekočini : $m = \rho \cdot V \Rightarrow dm = \rho\, dV + d\rho \cdot V$

↳ pogosto pozabimo, npr redčenje barvila v posodi s konst. V!

→ nihajni čas mat. nihala : $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

↳ $\ln t_0 = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g \;/\frac{d}{dt}$

$$\frac{dt_0}{t_0} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

↔ z logaritmiranjem hitro do relativne spremembe!

→ integralske funkcije : $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

↳ $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ (zg. meja!) → pogosto pozabimo.... $f(x) = \int_{H(x)}^{G(x)} F(t)\,dt \Rightarrow f'(x) = F(G(x))\,G'(x) - F(H(x))\,H'(x)$

↳ $df = \frac{\sin x}{x}\,dx$

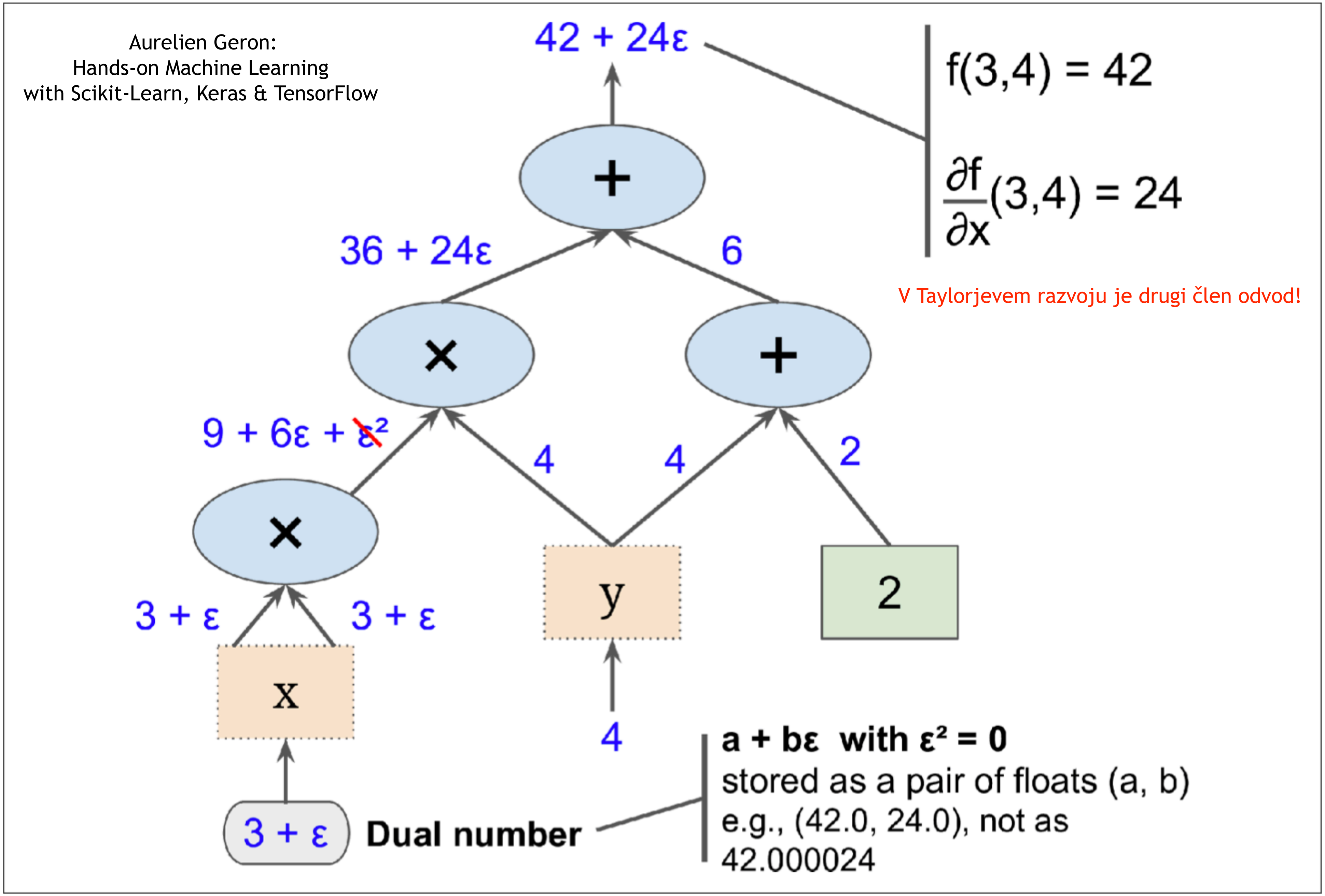


Figure D-2. Forward-mode autodiff using dual numbers

FUNKCIJSKE VRSTE

nočemo do smrti seštevati členov, ostanek pod kontrolo...

→ zapis neke funkcije s KONČNO vrsto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n + R_n(x)$$

v okolici naše točke x_0

↳ ostanek: za nas bistven za oceno natančnosti!

↳ MOTIVACIJA: poenostavimo račun znotraj naše natančnosti oz. navedimo dejansko izračunljivo formulo.

aproksimacija v okolici x_0

↳ računalniške implementacije funkcij!
(Feynman in arctg x ...)
↳ v osnovi računalniki/CPU znajo ±, ·, /

↳ v danem zapisu je vrsta (končna) POTENČNA vrsta:

↳ fiziki tipično predpostavimo, da velja: $R_n(x) \to 0$ za $n \to \infty$, $x = $ KONST.

↳ to ni nujno, lahko tudi $R_n \to R_{MIN}$, $R_{MIN} \neq 0$...

↳ posledično je vsak člen manjši

↳ vrsta KONVERGIRA

↳ PERTURBATIVNI RAČUN: VSAK NADALJNJI KORAK SO POPRAVKI (MOTNJE, PERTURBACIJE)

↳ potenčne vrste imajo matematično kup lepih lastnosti/teoremov:

- kako jih množimo, delimo, integriramo, odvajamo... (že znate...)
- morda poudarimo, da je zapis funkcije s potenčno vrsto ENOLIČEN!

→ toplo vam PRIPOROČAM, da si zapomnite najbolj pogoste vrste: $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\frac{1}{1 \pm x}$, $\ln(1+x)$ ipd...

↳ vsaj nekaj členov... (v praksi 2 ...)

→ zgled: če znate nekaj vrst in pazite na dovolj natančnosti:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$

izračunajmo $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right)}_{z}} = 1 + \left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right)^2 + \dots$

do natančnosti: x^4 (okrog $x_0 = 0$)

↳ tudi x^4 ... ostale zanemari...

$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{(2!)^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^2}{24} \dots$

→ za ANALITIČNE funkcije je ta zapis s potenčno vrsto ekvivalenten zapisu z (neskončno) Taylorjevo vrsto

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

analitična funkcija

Taylorjeva vrsta

→ v literaturi tudi izraz MACLAURINOVA VRSTA: "Taylor okrog $x_0 = 0$"

↳ večina: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (ena od definicij..)

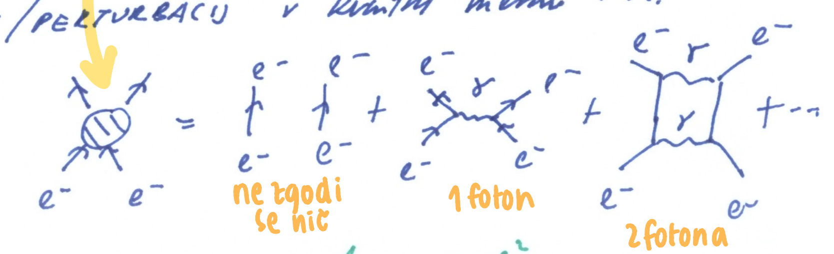
↳ Taylorjeva vrsta ima tudi dobro definiran ostanek: $R_N(x) = \frac{(x-x_0)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$; $\xi \in [x_0, x]$ vrednost v intervalu

če se ustavimo pri N: $\sum_{n=0}^{N} \dots$

Takšnega problema v splošnem ne znamo rešiti, zato to računamo s pertrubacijami – s postopnimi približki

↳ na vajah lep zgled s izračunom vrste za $\tan(x)$...

↳ v Fiziki je primer 'par excellence' računanje popravkov / PERTURBACIJ v kvantni mehaniki...



→ 'OBRATNA PARANOJA' v fiziki: če neka zakonitost zgleda kot začetek potenčne vrste, ali je pravi odgovor (neznana) neskončna vrsta ≡ RESUMACIJA, EKSPONENCIACIJA... ← $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots$

→ zgledi: nekaj patoloških primerov z diferenciali/vrstami:

Z različnimi kalkulatorji / programi dobimo različne rešitve

• $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \operatorname{tg} x$; izračun pri $x = 1{.}5\cdot10^{-3}$ nam da kup številk na različnih platformah: $\left\{ \begin{array}{l} -9\cdot10^{-16} \\ 3\cdot10^{-10} \\ 6{.}06\cdot10^{-16} \end{array} \right.$ ... !

↳ razlog je krajšanje členov:

$$\left.\begin{array}{l} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \underline{x + \frac{x^3}{3}} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \\ \operatorname{tg} x = \underline{x + \frac{x^3}{3}} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \end{array}\right\}$$

za naš primer razlike dveh števil, enakih do 16. decimalke! $(10^{-3})^5$

↳ $f(x) = \frac{x^5}{15} + \frac{4x^7}{45} + \dots$ $\Big\}$ $f(x_0 = 1{.}5\cdot10^{-3}) = 5{.}06\cdot10^{-16}$, napaka $x^7 \sim 10^{-21}$

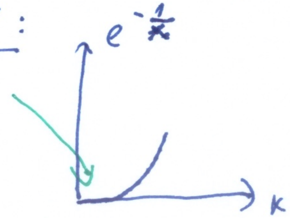
• razvij $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ okrog $x=0$: $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Big|_{x=0}$ ← ali lim $x \to 0$ (od zgoraj...)

$$a_0 = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{z\to\infty} e^{-z} = 0$$

$$a_1 = \lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z\to\infty} e^{-z}\cdot z^2 = 0$$

↳ ... etc: $a_n = 0$ — FUNKCIJA NI ANALITIČNA V $x=0$ (seveda), vsi odvodi 0

→ v praksi 'ravna kot deska' v $x=0$:



fiziki pogosto ne kompliciramo, dokler pač ni treba... ..ampak tu je treba!

▶ **Example 1.** Evaluate $f(x) = \ln\sqrt{(1+x)/(1-x)} - \tan x$ at $x = 0.0015$.

Here are answers from several calculators and computers: -9×10^{-16}, 3×10^{-10}, 6.06×10^{-16}, 5.5×10^{-16}. All of these are wrong! Let's use series to see what's going on. By Section 13 methods we find, for $x = 0.0015$:

$$\ln\sqrt{(1+x)/(1-x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\cdots \qquad = 0.001500001125001518752441,$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}\cdots \qquad = 0.001500001125001012500922,$$

$$f(x) = \frac{x^5}{15} + \frac{4x^7}{45}\cdots \qquad = 5.0625 \times 10^{-16}$$

↳ včasih očitno potrebimo: določeni integral s fiksnimi mejami je ŠTEVILKA!

↳ izračunamo lahko <u>simbolno</u>: Abramowitz & Stegun ('biblija'), Mathematica (program), 'outsourcing' matematikom...

↳ Schrödinger in H-atom...

<u>numerično</u>: Simpson in ostale formule, Monte-Carlo metode...

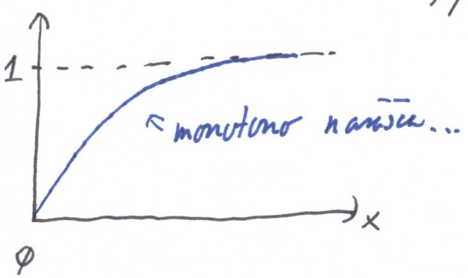
↳ za nas je integral itak vsota majhnih prispevkov! (atomi v snovi...)

↳ več izzivov z računi približkov <u>integralskih funkcij</u>:

↳ na primer Gaussov integral / erf: $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ – nima lepe analitične rešitve...

x v zg. meji

→ $\mathrm{erf}(x\to\infty) = 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ določen integral..



↳ potenčna vrsta enostavno izračunljiva: za $x \ll 1$ je $0 < t < x \Rightarrow t \ll 1$ in:

↳ pomembno!

$$\mathrm{erf}(x) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Big|_0^x$$

$$\mathrm{erf}(x) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

→ ostanek: $\frac{\xi^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ sorazmerno počasi pada!...

↳ ni zelo uporaben izraz za $x \to 1$ ...

↓

naučimo se še nekaj novega...