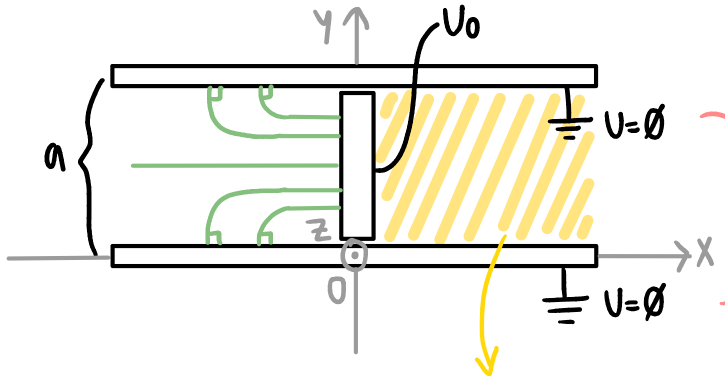
Poissonova enačba: $\nabla^2 U(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$
↳ Lokalna enačba
(za vsako točko prostora)
↳ Potencial el. polja

Toda ponavadi naboj ni porazdeljen po celotnem prostoru: $\rho(\vec{r}) = 0$ skoraj povsod
$\Rightarrow \nabla^2 U(\vec{r}) = 0$ skoraj povsod
↓
Laplaceova enačba

$\rho(\vec{r}) \neq 0$ na ploščah, v točkah ... to nam pa da robne pogoje za našo enačbo

(1) Prečni trak v ploščatem kondenzatorju



Zanima nas, kakšen je potencial znotraj kondenzatorja.

Obe plošči ozemljimo = potencial obeh plošč je enak Ø

Zaradi simetrije se omejimo le na desni polprostor kondenzatorja

$\nabla^2 U(x,y) = 0$ → znotraj kondenzatorja NI naboja – naboj imamo na traku, pa tudi na obeh ploščah kondenzatorja

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) U(x,y) = 0$$

Takšne enačbe poskusimo rešiti s separacijo spremenljivk: $U(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$\Rightarrow X''Y + XY'' = 0 \quad \Big| : XY$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = K^2$$

$X(x) = Ae^{Kx} + Be^{-Kx}$

Rešimo DE za X in Y: $X'' - K^2X = 0$, $Y'' + K^2Y = 0$ $\Rightarrow Y(y) = C \cdot \sin(Ky) + D \cdot \cos(Ky)$
Za rešitev potrebujemo še robne pogoje:

RP1: $U(0,y) = U_0$
RP2: $U(x,0) = 0$
RP3: $U(x,a) = 0$
RP4: $U(\infty,y) \neq \infty$

Želimo, da nam potencial v $\pm\infty$ ne podivja

Iz RP4 $\Rightarrow A = 0$ (Ae^{Kx} ponori v ∞). Uporabimo RP2 $\Rightarrow D = 0$ ($\cos \neq 0$ v $x=0$).
RP3:

$$Be^{-Kx} \cdot C \sin(Ka) = 0 \Rightarrow \sin(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = 0 + n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}$$

$$U(x,y)=\boxed{BC}e^{-Kx}\cdot\sin(Ky)$$

$B'\neq 0$, da ne dobimo trivialne rešitve

$$\Rightarrow U_n(x,y)=B_n'\cdot e^{-\frac{n\pi}{a}x}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$\Rightarrow U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n'e^{-\frac{n\pi}{a}x}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Določiti moramo še konstante B_n'. Uporabimo še preostali pogoj RP1:

$$U(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n'\cdot 1\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}_{\text{bazne funkcije}}=U_0 \quad \Big/\int_0^a\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)dy$$

Leva: $$\int_0^a U_0\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)dy=U_0\cdot\left(-\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\right)\cdot\frac{a}{m\pi}\Big|_0^a=U_0\cdot\frac{a}{m\pi}\left[-\cos\left(\frac{m\pi}{a}\cdot a\right)+\cos 0\right]=$$
$$=U_0\cdot\frac{a}{m\pi}\left[1-\cos(m\pi)\right]=U_0\cdot\frac{a}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right]$$

Desna: $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a\underbrace{B_n'\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)}_{\text{skalarni produkt dveh baznih funkcij}}dy=\sum_{n=1}^{\infty}B_n'\cdot\underbrace{\delta_{mn}}_{\text{zaradi ortogonalnosti}}\cdot\underbrace{\int_0^a\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy}_{\frac{1}{2}\cdot\text{dolžina intervala}}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n'\cdot\frac{1}{2}a$$

Enačimo levo in desno stran:

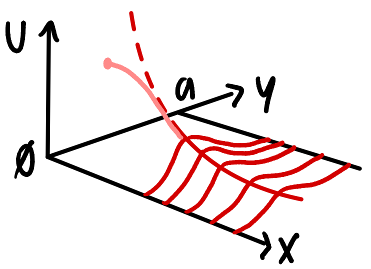
$$B_n'\cdot\frac{1}{2}\cancel{a}=\frac{\cancel{a}\cdot U_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\boxed{U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)e^{-\frac{n\pi}{a}x}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

Poglejmo si še dva limitna primera:

$x\gg a$: $e^{-\frac{n\pi}{a}x}\xrightarrow{n\to\infty}1$, zato obdržimo le člen pri $n=1$:

$$U(x,y)=\frac{2U_0}{\pi}\cdot 2\cdot e^{-\frac{\pi}{a}x}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)=\frac{4U_0}{\pi}e^{-\frac{\pi}{a}x}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)$$



$y=\frac{a}{2}$ (sredina kondenzatorja):

$$E\left(x,\frac{a}{2}\right)=(E_x,0)$$

$$E_x=-\frac{\partial}{\partial x}U(x,y)=\frac{2U_0}{a}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(1-(-1)^n)}_{\text{konstanti}}e^{-\frac{n\pi}{a}x}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

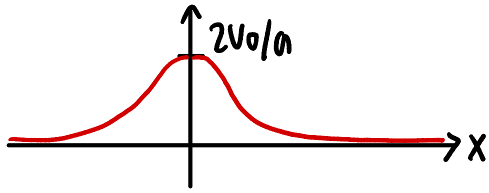
$=\alpha^n=\left(e^{-\frac{\pi x}{a}}\right)^n\cdot\ldots$ = geometrijska vrsta!

n	1	2	3	4	5
	2	0	-2	0	2

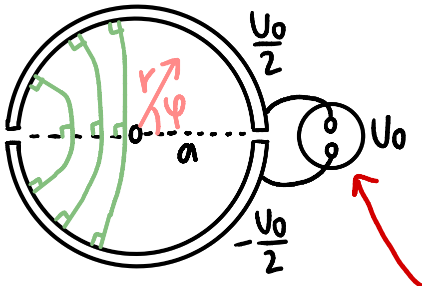
Predfaktorji

$$\Rightarrow E_x=\frac{4U_0}{a}\left(\alpha-\alpha^3+\alpha^5-\alpha^7+\ldots\right)=$$
$$=\frac{4U_0}{a}\alpha\underbrace{\left(1-\alpha^2+\alpha^4-\alpha^6+\ldots\right)}_{\frac{1}{1+\alpha^2}}$$

$$\text{sledi: } E_x = \frac{4U_0}{a\left(1+e^{-\frac{2\pi x}{a}}\right)} \cdot e^{-\frac{\pi x}{a}} = \frac{2U_0}{a} \cdot \frac{2}{e^{\pi x/a} + e^{-\pi x/a}} = \frac{2U_0}{a \cdot \mathrm{ch}(\pi x/a)}$$



(2) Prepolovljena prevodna cev



Zanima nas U znotraj cevi: $U(r,\varphi) = ?$

$$\nabla^2 U(r,\varphi) = 0 \text{ znotraj}$$

Nastavek: $U(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Napetostni izvir ustvarja razliko napetosti med zgornjo in spodnjo polovico cevi, ki je enaka Uo

Vstavimo nastavek v enačbo:

$$\Phi\frac{1}{r}(rR')' + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = \emptyset \quad / : \Phi$$

$$\frac{1}{r}(R' + rR'') + \frac{R}{r^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi} = \emptyset \quad / \cdot r^2/R$$

$$\frac{rR' + r^2R''}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2$$

↳ konstanta

$$\Phi'' + m\cdot\Phi = \emptyset$$

↳ $\Phi(\varphi) = A\sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi)$, $m \in \mathbb{N}$

$m=0$: $\Phi(\varphi) = a\varphi + b$

$$r^2R'' + rR' - m^2R = \emptyset$$

↳ $R(r) = C\cdot r^m + D\cdot r^{-m}$

(rešitve so potenčne funkcije)

$m=0$: $rR'' + R' = 0$

$R''/R' = -1/r \rightarrow (\ln R')' = -\frac{1}{r}$

$\ln R' = \ln C - \ln r$

$= \ln C/r$

$\Rightarrow R' = \frac{C}{r} \Rightarrow R = C\cdot\ln r + d$

Splošna rešitev:

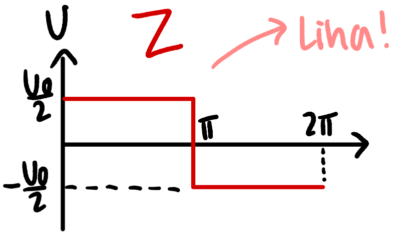
$$U(r,\varphi) = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\sin(m\varphi) + B_m\cos(m\varphi)\right)\cdot\left(Cr^m + Dr^{-m}\right)}_{\text{Periodični del}} + \underbrace{(a\varphi+b)\cdot(c\cdot\ln r + d)}_{m=0}$$

Fm

To je nastavek, ki smo ga tokrat izpeljali, naslednjič pa bo podan

Robni pogoji :

$$RP1: U(a,\varphi) = \begin{cases} U_0/2 \ ; & 0 < \varphi \leq \pi \\ -U_0/2 \ ; & \pi < \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$



$$RP2: U(r \to 0, \varphi) \neq \infty$$ → stvar ne podivja v izhodišču

4. VAJE — 26.10.2021

...nadaljujemo od prejšnjič:

Iz RP2 takoj sledi, da $D=0$, ker r^{-m} podivja v izhodišču
Ker je funkcija zgoraj liha, mora biti tudi rešitev liha, zato lahko stran pomečemo tudi kosinuse: $A_m=0$. Sledi:

$$U(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cdot \sin(m\varphi) \cdot r^m$$

V to zdaj vstavimo robni pogoj :

$$U(a,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cdot \sin(m\varphi) \cdot a^m = Z \qquad \Big/ \cdot \int_0^{2\pi} \sin(n\varphi)\, d\varphi$$

Da bomo dobili F_m, moramo skalarno pomnožiti z drugo skalarno funkcijo

$$LS: \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} F_m \cdot \sin(m\varphi) \cdot \sin(n\varphi) \cdot a^m d\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cdot a^m \cdot \delta_{nm} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(m\varphi) d\varphi}_{1/2 \cdot \text{dolžina int.}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cdot a^m \cdot \delta_{nm} \cdot \pi = F_n a^n \cdot \pi$$

$$DS: \int_0^{2\pi} Z \cdot \sin(n\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{U_0}{2} \cdot \sin(n\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\frac{U_0}{2}\right) \cdot \sin(n\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{U_0}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot (-\cos(n\varphi))\Big|_0^{\pi} + \frac{U_0}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \cos(n\varphi)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)\right) =$$

$$= \frac{U_0}{2} \cdot \frac{1}{n} \left[-\cos(n\pi) + \underbrace{\cos 0}_{1}\right] + \frac{U_0}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} - \cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{U_0}{2n} \cdot \left[1 - \cos(n\pi)\right] + U_0/2n \left[1 - \cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{U_0}{n} \left[1 - \cos(n\pi)\right] = \frac{U_0}{n} \left[1 - (-1)^n\right]$$

$$LS = DS \Rightarrow F_n a^n \cdot \pi = \frac{U_0}{n} \left[1 - (-1)^n\right] \Rightarrow F_n = \frac{U_0}{n \pi a^n} \left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\boxed{U(r,\varphi) = U_0 \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1-(-1)^n}{n} \cdot \sin(n\varphi)}$$

Tega ne znamo sešteti, lahko pa si pogledamo kakšen poseben primer.

Izračunajmo el. polje na ravnini, ki razpolavlja cev: $E = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}U\Big|_{\varphi=0}$ Gradient v cil. koord.

$$E = -\frac{U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{a^n}\cdot\overbrace{\frac{1-(-1)^n}{\cancel{n}}}^{2,0,2,0,\dots}\cdot\cancel{n}\cdot\overbrace{\cos(n\varphi)}^{1}\Big|_{\varphi=0} =$$

$$= -\frac{2U_0}{a\pi}\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{r}{a}\right)^4+\left(\frac{r}{a}\right)^6+\dots\right] =$$

kaže dol

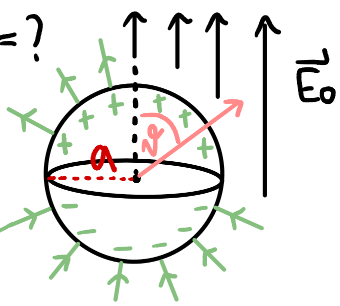
$$= -\frac{2U_0}{a\pi}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \xrightarrow{r\to a} \text{divergira!}$$

Ker sta plošči zelo blizu skupaj je tam ogromno električno polje!

Kaj pa v navpični ravnini? $\to E(r,\frac{\pi}{2}) = -\frac{\partial}{\partial r}U(r,\varphi)\Big|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{2U_0}{a\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}$

(1) Prevodna krogla v homogenem električnem polju

$U(r,\vartheta) = ?$



Povsod zunaj krogle velja $\nabla^2 U(r,\vartheta) = \emptyset$

Osno simetrične rešitve:

$$\boxed{U(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + B_\ell\cdot r^{-(\ell+1)}\right)\cdot\overbrace{P_\ell(\cos\vartheta)}^{\text{Legendrovi polinomi}}}$$

ortogonalni:
$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = 1/2(3x^2-1)$
$P_3(x) = 1/2(5x^3-3x)$
⋮

Robni pogoji:

Površina kovine je vedno ekvipot. ploskev, mi smo konstanto postavili kar na $\emptyset$.

RP1: $U(a,\vartheta) = 0$

RP2: $U(r\to\infty,\vartheta) = -E_0\cdot r\cdot\cos\vartheta = -E_0\cdot z$

$\vec{E}_0$

Daleč v ∞ bodo silnice, ki se stekajo v kroglo, ravne. Polje je tam homogeno

Upoštevajmo RP2: $\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell\cdot r^\ell\cdot P_\ell(\cos\vartheta) = -E_0\cdot\underbrace{r}_{r_1}\cdot\underbrace{\cos\vartheta}_{P_1(\cos\vartheta)}$ $\Rightarrow$ Samo $A_1 \neq 0$!

$B_\ell r^{-(\ell+1)} \xrightarrow{r\to\infty} \emptyset$

$\Rightarrow A_1 = -E_0$

Vmesna rešitev:

$$U(r,\vartheta) = -E_0\cdot r\cdot\cos\vartheta + \sum_{\ell=0}^{\infty}B_\ell r^{-(\ell+1)}\cdot P_\ell(\cos\vartheta)$$

Za to, da določimo B_ℓ, vstavimo še RP1:

$$U(a,\vartheta) = -E_0\cdot a\cdot\cos\vartheta + \sum_{\ell=0}^{\infty}B_\ell a^{-(\ell+1)}\cdot P_\ell(\cos\vartheta) = 0$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}B_\ell a^{-(\ell+1)}\cdot P_\ell(\cos\vartheta) = E_0\cdot a\cdot\overbrace{\cos\vartheta}^{P_1(\cos\vartheta)}$$

Legendrov polinom P_1 razvijemo po P_ℓ. Preživi le $\ell=1$!!!

$l=1$: $B_1 \cdot a^{-2} \cdot \cancel{P_1(\cos\vartheta)} = E_0 a \cdot \cancel{P_1(\cos\vartheta)}$

$$B_1 = E_0 a^3$$

Končna rešitev:

$$\boxed{U(r,\vartheta) = -E_0 r \cos\vartheta + E_0 a^3 r^{-2} \cos\vartheta = -E_0 \cdot r \cdot \cos\vartheta + \frac{E_0 \cdot a^3}{r^2} \cdot \cos\vartheta}$$

Tu smo imeli srečo, ker je bil robni pogoj kar Legendrov polinom.
Če bi imeli splošen robni pogoj:

$$\sum A_l P_l(\cos\vartheta) = f(\cos\vartheta) \quad / \int P_{l'}(\cos\vartheta)\, d(\cos\vartheta)$$

Poglejmo si še malo našo rešitev:

$$U(r,\vartheta) = \underbrace{-E_0 \cdot r \cdot \cos\vartheta}_{\text{zunanje homogeno polje}} + \overbrace{\frac{E_0 \cdot a^3}{r^2} \cdot \cos\vartheta}^{\text{Naboji na krogli}}$$

Potencial točkastega dipola:

$$U_{Dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

dipolni moment

$$U(z) = \frac{p_e \cdot r \cdot \cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3}$$

S pomočjo tega lahko iz rešitve izračunamo dipolni moment:

$$\boxed{p_e = 4\pi\varepsilon_0 E_0 \cdot a^3}$$

||

Dipolni moment porazdelitve nabojev na krogli

Kako pa bi izračunali dipolni moment brez tega trika:

Po def.: $\vec{p}_e = \int \vec{r}'\, de = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'$

Najprej izračunajmo $\sigma(\vartheta)$ = površinska gostota naboja

Gauss: $de = \varepsilon_0 E\, dS \quad /:dS$

$$\sigma = \frac{de}{dS} = \varepsilon_0 E$$