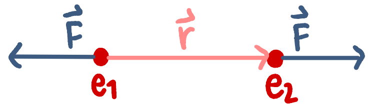
Elektrostatika

1. Coulombova sila med naboji

Elektrostatika opisuje sile med mirujočimi naboji, ki so konstantni / časovno nespremenljivi. Točkasti nabiti delci med seboj delujejo s silo

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$



$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$ ... influenčna konstanta

2. Velikost in enote električnega naboja

→ Naboj merimo v $C = As$

→ Naboj je (praviloma) mnogokratnik $e_0 = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,As$

Pojav	Naboj
Naboj kvarka	$1/3\,e_0$, $2/3\,e_0$
Naboj e^-	e_0
Naboj na kondenzatorju	$10^{-7}\,As$
Naboj pri blisku	$1-100\,As$
Akumulator	$0{,}2-10^{6}\,As$
Naboj Zemlje: brez atmosfere	$5\cdot 10^{5}\,As$
z atmosfero	$1\,As$
Naboj, ki ga proizvede elektrarna (v enem letu)	$10^{11}\,As$

3. Jakost električnega polja

→ V Faradayevi oz. Maxwellovi sliki se delovanje / interakcije med nabitimi delci opiše z delovanjem električnega polja.

→ Električno polje je posrednik interakcije.

→ Električno silo izračunamo kot $\vec{F} = e\vec{E}$ $(\vec{F}_{21} = e_1\vec{E}_2)$

→ Smer $\vec{E}$ je vedno določena s smerjo sil

→ Električno polje za točkast naboj je

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

→ Transformacijske lastnosti $\vec{E}$:

- $\vec{E}$ je vektor, torej se pri ortogonalni transformaciji transformira kot vektor $\vec{E}' = \underline{\sigma}\vec{E}$
- $|\vec{E}|^2$... intenziteta (je skalar) je rotacijsko invariantna

→ Velikosti jakosti E:

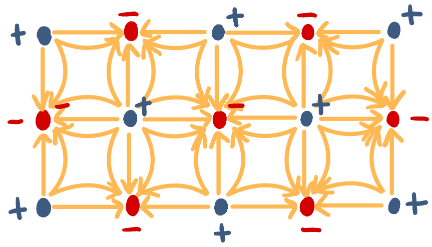
Pojav	E
Kozmično sevanje	$10\,\mu V/m$
Polje znotraj žice	$0{,}5\,mV/m$
Polje v zem. atmosferi	$100-300\,V/m$
Prebojna jakost v atm.	$1-3\,MV/m$
Polje preko bio. membran	$10\,MV/m$
Polje v laserju	$100\,TV/m$

4. Električne silnice

Električne silnice kažejo v smeri električnega polja. Uvedemo jih kot krivuljo:

$$\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{E}(\vec{r}(s))}{|\vec{E}(\vec{r}(s))|}$$

Primer: Nariši silnice



Faradayeva konstrukcija

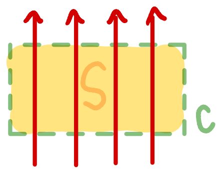
→ Silnice se ne sekajo
→ Gostota silnic ustreza jakosti električnega polja
→ Silnice so nezaključene

5. Električna cirkulacija

$$\Gamma_e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

C → Po zaključeni zanki C

Primer:



$\Gamma_e = 0$

Za vsa statična polja velja $\Gamma_e = 0$ iz česar sledi

$$\boxed{0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, d\vec{S}}$$

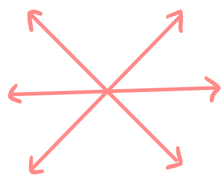
$C = \partial S$

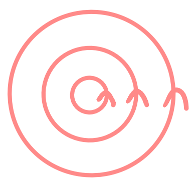
Stokesov izrek

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

Torej je statično električno polje brezvrtinčno

Primer: Kakšni sta polji





$$\vec{E} = E_0(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = B_0 \cdot \hat{e}_\varphi = B_0 \cdot \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y/r & x/r & 0 \end{vmatrix} = \Big(\overbrace{\partial_z \tfrac{x}{r}}^{0}, \overbrace{-\partial_z \tfrac{y}{r}}^{0}, \overbrace{-\partial_x \tfrac{x}{r} + \partial_y \tfrac{y}{r}}^{\neq 0\,!}\Big)$$

6. Električni pretok

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Kakšna je ploskev? → Poljubna

Posebna ploskev je zaključena ploskev ⇒ Gaussov izrek: $\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{e}{\varepsilon_0}$

7. Električni potencial

Elektrostatski oz. električni potencial navedemo kot skalarno funkcijo oz. polje kot

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})}$$

Zakaj smo uvedli φ? → Ker je skalar.

Primer: Električni potencial točkastega naboja

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\nabla\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} + \varphi_0\right)$$

Električni potencial je določen do konstante natančno, zato vedno govorimo le o razliki potencialov, ne pa o absolutni vrednosti

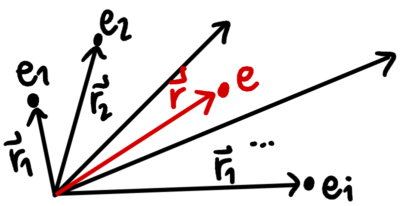
$$\boxed{\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \varphi_0}$$

UMERITEV = ko določimo, koliko je φ_0

↳ V našem primeru je φ_0 = konst., v fiziki višjih energij pa so to npr. funkcije

8. Princip superpozicije

Obravnavamo:



Kakšna je sila na naboj e?
→ V našem sistemu je sila na naboj e enaka:

$$\vec{F} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \frac{e_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2) + \ldots + \frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i) + \ldots\right]$$

Celotna sila je VSOTA posameznih PARSKIH prispevkov.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}}$$

Princip superpozicije

Enako velja za električno polje in električni potencial:

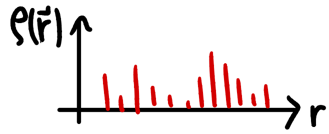
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \sum_i \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\\ \varphi(\vec{r}) &= \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|}\end{aligned}}$$

Električno polje in el. potencial sta ADITIVNA, kar pa pogosto ne velja za druga potencialna polja.

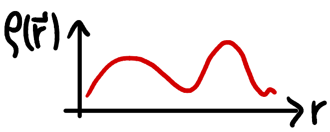
9. Gostota naboja

Električni naboj je pogosto porazdeljen, zato se uvede količino VOLUMSKA GOSTOTA NABOJA. O njej lahko razmišljamo

→ Diskretno: $\rho(\vec{r}) = \sum_i e_i \cdot \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$



→ Zvezno: $\rho(\vec{r}) = \frac{de}{dV}$



Z uporabo gostote naboja lahko zapišemo $\vec F, \vec E, \varphi$:

$$\to \vec F = \int_V \rho(\vec r)\cdot \vec E(\vec r)\, d^3\vec r$$

↳ Sila na neko telo z volumnom V, ki ima porazdeljen naboj po $\rho(\vec r)$

$$\to \vec E(\vec r) = \int_V \frac{\rho(\vec r\,')\cdot(\vec r - \vec r\,')}{4\pi\varepsilon_0\cdot|\vec r - \vec r\,'|^3}\, d^3\vec r\,'$$

$$\to \varphi(\vec r) = \int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r\,'|}\, d^3\vec r\,'$$

10. Primeri gostote naboja

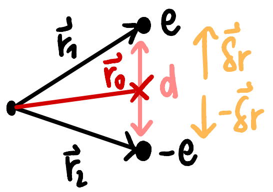
Tu se nahaja naboj

Taylorjev razvoj: $f(\vec r + \vec h) = f(\vec r) + \frac{\partial f}{\partial \vec r}\cdot \vec h + \dots$

(1) Točkast naboj: $\rho(\vec r) = e\cdot\delta(\vec r - \vec r\,')$

(2) Točkast dipol: $\rho(\vec r) = e\cdot\delta(\vec r - \vec r_1) - e\delta(\vec r - \vec r_2) =$

Predpostavimo, da je $\delta\vec r$ majhen ⇒ Taylor



$$= e\cdot\delta(\vec r - (\vec r_0 + \vec{\delta r})) - e\cdot\delta(\vec r - (\vec r_0 - \vec{\delta r})) =$$

$$= -e\cdot\vec{\delta r}\cdot\nabla(\delta(\vec r - \vec r_0)) - e\cdot\vec{\delta r}\cdot\nabla(\delta(\vec r - \vec r_0)) =$$

$$= \underbrace{-e\cdot 2\vec{\delta r}}_{\vec p}\cdot\nabla(\delta(\vec r - \vec r_0)) = -\nabla(\vec p\cdot\delta(\vec r - \vec r_0))$$

dipolni moment na enoto volumna = Polarizacija $\vec P$

3D delta fun.

$\nabla(\vec p\cdot\delta(\vec r - \vec r_0)) =$
$= \cancel{\nabla\vec p}\cdot\delta(\vec r - \vec r_0) + \vec p\cdot\nabla(\delta(\vec r - \vec r_0))$

0, ker je $\vec p$ = konst.

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\vec r) = -\nabla\cdot\vec P}$$

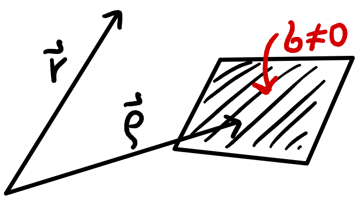
V sistemih el. dipolov sta $\rho(\vec r)$ in polarizacija neposredno povezani.

(3) Površinsko porazdeljen naboj: Naboj je porazdeljen po tanki plasti oz. površini, zato vpeljemo **površinsko gostoto naboja** $\sigma(\vec\varrho)$:

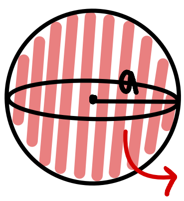
$$\rho(\vec r) = \sigma(\vec\varrho)\cdot\delta(z - z_0)$$

Teče po površini

Kje je plast naboja



(4) Volumsko porazdeljen naboj:

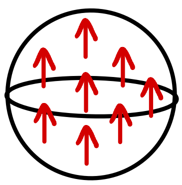


Heavysideova / stopničasta fun.

$$\rho(\vec r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{če } r < a \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} = \rho_0\cdot H(a - r)$$

Naboj enakomerno porazdeljen po krogli

(5) Volumsko porazdeljeni dipoli:



$$\vec P(\vec r) = \begin{cases} \vec P_0, & r < a \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} = \vec P_0\cdot H(a - r)$$

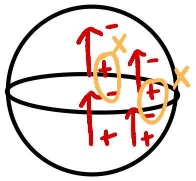
$$\rho(\vec r) = -\nabla \vec P(\vec r) = -\nabla\left(\vec P_0 H(a-r)\right) = -\cancel{\nabla \vec P_0}\, H(a-r) - \vec P_0 \nabla H(a-r) =$$

$\cancel{\nabla \vec P_0} \to \emptyset$

$$= -\vec P_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec r}\left(H(a-r)\right) = +\vec P_0 \cdot \delta(a-r)\cdot(+1)\cdot \frac{\vec r}{r}$$

$\frac{\vec r}{r} = \nabla \vec r$

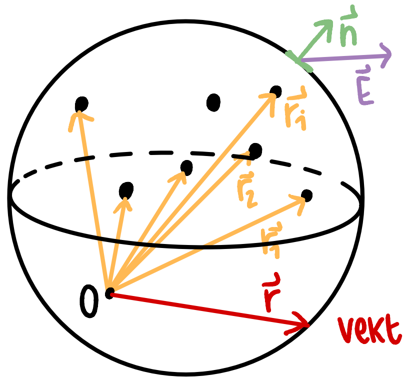
$$\boxed{\rho(\vec r) = \left(\vec P_0 \cdot \frac{\vec r}{r}\right)\cdot \delta(a-r)}$$ → Gostota naboja je samo na robu krogle



Ne izničijo se le naboji na robu krogle.

11. Integralna oblika Gaussovega izreka

Obravnavamo (diskretna slika):



Sklenjena površina S

Gauss se je vprašal, kaj se zgodi, če naboje zaobjamemo s sklenjeno površino.

Zanima nas električni pretok skozi tako sklenjeno površino, ki zajema naboje e_i.

Kot med lokalno normalo in poljem $\vec E_i$

$$\oint_S \vec E \cdot d\vec S = \oint_S E\, dS \cos\vartheta(\vec r) = \oint_S \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r_i|^2}\cos\vartheta_i\, dS$$

Razmislimo, kaj računamo:

Kot med normalo površine in poljem 1. naboja

$$\oint \vec E\, d\vec S = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cos\vartheta_1}{|\vec r - \vec r_1|^2}\, dS + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cos\vartheta_2}{|\vec r - \vec r_2|^2}\, dS + \dots + \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\cos\vartheta_i}{|\vec r - \vec r_i|^2}\, dS + \dots$$

teče po sferi ↗ ↖ kje je 1. naboj

BŠS lahko izberemo npr. $\vec r_1 = 0$ (1. naboj je v središču sfere):

$$\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\cos\vartheta_1}{|\vec r - \cancel{\vec r_1}|^2}\, dS = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{r^2}\, dS = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\int \cancel{\frac{1}{r^2}}\cdot \cancel{r^2}\cdot \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{\text{Prostorski kot}} = \frac{e_1}{\varepsilon_0}$$

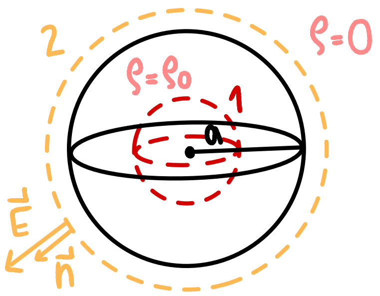
Gauss je pokazal, da so tudi ostali integrali enaki e/ε_0.

$$\Rightarrow \oint \vec E \cdot d\vec S = \frac{\sum e_i}{\varepsilon_0}$$

Torej velja: $\boxed{\oint \vec E \cdot d\vec S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\vec r)\, d^3\vec r}$ oz. $\boxed{\oint \vec E \cdot d\vec S = \frac{e}{\varepsilon_0}}$ → Celoten naboj znotraj ploskve S

Gaussov izrek

Primer uporabe: Določi električno polje enakomerno nabite krogle



$$\rho_0=\frac{e}{4\pi a^3/3}\ ,\quad \rho(\vec{r})=\begin{cases}\rho_0, & r<a\\ 0, & \text{sicer}\end{cases}$$

$$\oint_{\partial V}\vec{E}d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})d^3\vec{r}$$

1.) $r<a$: $\displaystyle\oint_{\partial V}EdS\cancelto{1}{\cos\vartheta}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r})d^3\vec{r}$

$$E\oint_{\partial V}dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r})d^3\vec{r}$$

$$E\cdot 4\pi \cancel{r^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\cancel{3}e}{\cancel{4\pi}a^3}\cdot\frac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}}}{\cancel{3}}\Rightarrow \boxed{E=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{a^3}}$$

2.) $r>a$: $\displaystyle\oint_{\partial V}EdS\cancelto{1}{\cos\vartheta}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r})d^3\vec{r}$

$$E\oint_{\partial V}dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho_0\cdot H(a-r)dr$$

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\cdot\frac{4\pi a^3}{3}=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{\cancel{\frac{4\pi a^3}{3}}}\cdot\cancel{\frac{4\pi a^3}{3}}\Rightarrow\boxed{E=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

12. Diferencialna oblika Gaussovega izreka

Uporabimo izrek Gauss-Ostrogradskega:

$$\oint_{\partial V}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V\nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

Diferencialna oblika Gaussovega izreka:

$$\Rightarrow \oint_{\partial V}\vec{E}d\vec{S}=\int_V\nabla\cdot\vec{E}dV$$
$$\oint_{\partial V}\vec{E}d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r})dV$$

$$\Rightarrow\boxed{\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}\rightarrow \text{Tudi 1. Maxwellova enačba}$$